数理解析研究所講究録
308巻 1977年 55-92

Metasymplectic geometry と triple systems について

熊本大 教養　山口 清

F_4型およびE_6型の例外Lie環がC. ChevalleyとR. D. Schaferにより具体的に構成されたのち，H. FreudenthalはF_4型，E_6型の例外リー群で不変な幾何学を研究した，そしてさらに「F_4, E_6, E_7, E_8」型の例外リー環の具体的構成を行い，それをもとにoctavian planeまたはCayley planeから出発して5-dim. symplectic geometryを展開し，いわゆる"magic square"からmetasymplectic geometryの研究を行った。これは始めの3次Hermite行列の元素が実数，複素数，四元数，八元数であるにしたがって「F_4, E_6, E_7, E_8」型の例外リー群で不変な幾何学である．（ここでなされなかったG_2型の例外リー群の幾何学はG. J. Schellekensによって研究されhexagonic structureとよばれた）例外リー環の構成，それに関した一般化やその幾何学についてその后多くの人々によって研究された。これらの研究を通して，リー環の場合のようなbinary productをもった代数系のみでなく，ternary product をもった代数系，すなわち，triple（または，ternary）system を考えること，およびそれらの triple system を Lie triple system に関連づけることが大切であることが示されているように思われる．このことは例外リー群の研究においては，リー群そのものの立場のみでなく対称空間の立場から考えることが大切であることを示しているように思われる．

ここでは，Freudenthal による研究を出発点として，その一般化を試みる．5-dim. symplectic geometry において，P，Q，R を平面とする（$P \times P = Q \times Q = R \times R = 0$）．二平面 P，Q が交わる（$\{P, Q\} = 0$）とき，$(P \times Q)R$ は二平面 P と Q の交点 $P \times Q$ を通り，平面 R と一直線で交わるような平面を表わす．この $(P \times Q)R$ や $(P \times Q)R - \frac{1}{8}\{P, Q\}R$ を P，Q，R について一つの ternary product と考えることにより，symplectic triple system (H. Asano)，(balanced) symplectic algebra (J. R. Faulkner, J. C. Ferrar) や J-ternary algebra (B. N. Allison, W. Hein) 等の概念が導びかれた．これらの関係を整理し，I. L. Kantor による 2nd order の generalized Jordan triple system にならって Freudenthal-Kantor triple system を定義し，Lie triple system の立場からこれらの system を考えてみたい．

準備　Freudenthal によつて与えられた定義および性質について述べる．くわしくは [5, 6, 7, 8] を参照して下さい．

$\mathfrak{L}$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上の Cayley algebra とする．任意の元 $x \in \mathfrak{L}$ に対して，$\bar{x}$ で x の共軛元を示す．X を Cayley 数を元素にもつ3次の Hermite 行列とする：

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \xi_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \in \mathfrak{L}.$$

かかる X の全体 $\mathfrak{J}$ は積 $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ に関して exceptional Jordan algebra をなす．ここに，XY は行列 X と Y の普通の積である．

$$\mathrm{sp}\, X := \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,$$

$$(X, Y) := \mathrm{sp}(X \circ Y)$$

$$= \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + 2\,\mathrm{Re}(x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3),$$

$\mathfrak{J}$ の内に対称積 $X \times Y$ が次により定義される：

$$X \times Y := X \circ Y - \frac{1}{2}\bigl(\mathrm{sp}(X)Y + \mathrm{sp}(Y)X - (\mathrm{sp}(X)\,\mathrm{sp}(Y) - (X, Y))I\bigr),$$

ここで，I は単位行列を示す．X, Y に対し，$\mathfrak{J}$ の一次写像 $\langle X, Y\rangle$ が次により定義される：

$$\langle X, Y\rangle Z := 2Y \times (X \times Z) - \frac{1}{2}(Z, Y)X - \frac{1}{6}(X, Y)Z.$$

$\bar{\mathcal{R}}$でベクトル空間としての直和 $\mathfrak{J}\oplus\mathfrak{J}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ を示す．
$\bar{\mathcal{R}}$の元 P は

$$P = \ulcorner X,\ U,\ \xi,\ \omega \urcorner$$

または行ベクトルの記号で

$$P = \begin{pmatrix} X \\ U \\ \xi \\ \omega \end{pmatrix}, \qquad X, U \in \mathfrak{J}, \quad \xi, \omega \in \mathbb{R}$$

とかかれる．$\mathfrak{f}$で$\bar{\mathcal{R}}$の一次写像 $\Sigma_i \langle X_i, Y_i \rangle$，$X_i, Y_i \in \mathfrak{J}$，によって張られる実ベクトル空間を示し，$\mathfrak{L} = \mathfrak{f}\oplus\mathbb{R}\oplus\mathfrak{J}\oplus\mathfrak{J}$（ベクトル空間としての直和）とおく．$\mathfrak{L}$ の元 $\textcircled{H}$ は

$$\textcircled{H} = \ulcorner \Sigma_i \langle X_i, Y_i \rangle,\ \rho,\ A,\ B \urcorner$$

または

$$\textcircled{H} = \begin{pmatrix} \Sigma_i \langle X_i, Y_i \rangle \\ \rho \\ A \\ B \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \Sigma_i \langle X_i, Y_i \rangle \in \mathfrak{f}, \\ \rho \in \mathbb{R}, \\ A, B \in \mathfrak{J}, \end{array}$$

とかかれる．$\bar{\mathcal{R}} \times \bar{\mathcal{R}}$ から $\mathfrak{L}$ への写像 $\times$ が次により定義される．

$$P_1 \times P_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle X_1, U_2 \rangle + \langle X_2, U_1 \rangle \\ -\frac{1}{4}\left((X_1, U_2) + (X_2, U_1) - 3\xi_1\omega_2 - 3\xi_2\omega_1 \right) \\ -U_1 \times U_2 + \frac{1}{2}(\xi_1 X_2 + \xi_2 X_1) \\ X_1 \times X_2 - \frac{1}{2}(\omega_1 U_2 + \omega_2 U_1) \end{pmatrix},$$

ここで，$P_i = \ulcorner X_i, U_i, \xi_i, \omega_i \urcorner$, $i = 1, 2$. $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ から $\mathbb{R}$ への交代双一次写像 $\{\,,\}$ が次により定義される：

$$\{P_1, P_2\} := (X_1, U_2) - (X_2, U_1) + \xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1 .$$

$\mathfrak{L}$ の元は次により $\mathfrak{R}$ に一次写像として作用する：$\Theta = \ulcorner \sum_i \langle X_i, Y_i \rangle, \rho, A, B \urcorner \in \mathfrak{L}$, $P = \ulcorner X, U, \xi, \omega \urcorner \in \mathfrak{R}$ に対して

$$\Theta P := \begin{pmatrix} \left(\sum_i \langle X_i, Y_i \rangle + \frac{1}{3}\rho\right) X + 2 B \times U + \omega A \\ -\left(\sum_i \langle Y_i, X_i \rangle + \frac{1}{3}\rho\right) U + 2 A \times X + \xi B \\ (A, U) - \rho \xi \\ (B, X) + \rho \omega \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{L}$ は $\mathfrak{R}$ に作用する一次写像のリー環になる．

ベクトル空間 $\mathfrak{R}$ 内の多様体 $\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{M} := \{ P \in \mathfrak{R} \mid P \times P = 0 \} = \{ P \in \mathfrak{R} \mid (X, U) = 3\xi\omega,\ X \times X = \omega U,\ U \times U = \xi X,\ \langle X, U \rangle = 0,\ X \circ U = \xi \omega I \}$ として定義する．すると，$\mathfrak{L}$ は連結多様体 $\mathfrak{M}$ を不変にする $\mathfrak{R}$ の射影変換群のリー環である．それで $\mathfrak{L} = \mathrm{Inv}(\mathfrak{M})$ と書く．

$\mathfrak{R}_4$ でベクトル空間としての直和 $\mathrm{Inv}(\mathfrak{M}) \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R}$ を示す，ここで $\mathfrak{a}_1$ は A_1 型の単純リー環のコピーである．$\mathfrak{R}_4$ の元 Φ は次のようにかかれる：

$$\Phi = \ulcorner \begin{pmatrix} \Theta + \gamma & \underline{\delta} \\ \overline{\delta} & \Theta - \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix} \urcorner ,$$

ここで，$\Theta \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{M})$，　$\gamma, \underline{\delta}, \overline{\delta} \in \mathbb{R}$，　$P, P' \in \mathfrak{P}$．$\mathfrak{R}_4$ は次によって定義される積 $[\,,\,]$ に関して（$\mathfrak{J}$ の元が $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathfrak{C}$ 上の行列であるに従って）「F_4, E_6, E_7, E_8」型の例外単純リー環になる．

$$\Phi_i = \ulcorner \begin{pmatrix} \Theta_i + \gamma_i & \underline{\delta}_i \\ \overline{\delta}_i & \Theta_i - \gamma_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_i \\ P_i' \end{pmatrix} \urcorner ,\ i = 1, 2 \quad に対して$$

$$[\Phi_1\ \Phi_2] := \ulcorner \begin{pmatrix} \Theta + \gamma & \underline{\delta} \\ \overline{\delta} & \Theta - \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix} \urcorner ,$$

ここで，

$$\Theta = [\Theta_1, \Theta_2] + P_1 \times P_2' - P_2 \times P_1' ,$$

$$\gamma = \underline{\delta}_1 \overline{\delta}_2 - \underline{\delta}_2 \overline{\delta}_1 - \frac{1}{8}\{P_1, P_2'\} + \frac{1}{8}\{P_2, P_1'\},$$

$$\underline{\delta} = -2\gamma_1 \underline{\delta}_2 + 2\gamma_2 \underline{\delta}_1 - \frac{1}{4}\{P_1', P_2'\},$$

$$\overline{\delta} = 2\gamma_1 \overline{\delta}_2 - 2\gamma_2 \overline{\delta}_1 + \frac{1}{4}\{P_1, P_2\},$$

$$P = (\Theta_1 + \gamma_1)P_2 - (\Theta_2 + \gamma_2)P_1 + \underline{\delta}_1 P_2' - \underline{\delta}_2 P_1' ,$$

$$P' = (\Theta_1 - \gamma_1)P_2' - (\Theta_2 - \gamma_2)P_1' + \overline{\delta}_1 P_2 - \overline{\delta}_2 P_1 ,$$

[5, §7 ; 6, §25].

$\mathfrak{R}_4$ 上の対称双一次形式 $(\,,\,)$ が Killing 形式のスカラー

倍として，次により定義される：

$$(\Phi_1, \Phi_2) := -\frac{1}{\varepsilon_2} \, sp \, \widetilde{\Phi}_1 \widetilde{\Phi}_2 \quad ,$$

ここで，$\widetilde{\Phi}_i$ は $ad\,\Phi_i$ を示し，$\varepsilon_2 := \ulcorner 9, 12, 18, 30 \urcorner$．$\Phi_1$，$\Phi_2 \in \mathfrak{R}_4$ に対し，$\mathfrak{R}_4$ の一次写像 $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$ が次により定義される：

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \Phi = \frac{1}{2}(\widetilde{\Phi}_1\widetilde{\Phi}_2 + \widetilde{\Phi}_2\widetilde{\Phi}_1)\Phi - \frac{1}{2}(\Phi_1, \Phi)\Phi_2 - \frac{1}{2}(\Phi_2, \Phi)\Phi_1 + \epsilon(\Phi_1, \Phi_2)\Phi \, ,$$

ここで $\epsilon := \ulcorner \frac{5}{26}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8} \urcorner$．

ベクトル空間 $\mathfrak{R}_4$ 内の多様体 $\mathfrak{M}_4$ を $\mathfrak{M}_4 := \{ \Phi \in \mathfrak{R}_4 \mid \langle \Phi, \Phi \rangle = 0 \} = \{ \Phi \in \mathfrak{R}_4 \mid \widetilde{\Phi}^2 \Phi^* = (\Phi, \Phi^*)\Phi$ for all $\Phi^* \in \mathfrak{R}_4 \}$ として定義する．$\mathfrak{M}_4$ の元は（実スカラー倍を考えに入れないとき）symplecton とよばれる．

$\mathfrak{R}_1$ を $\mathfrak{R}_4$ の一次写像 $\Sigma_i \langle \Phi_i, \Phi_i' \rangle$，$\Phi_i, \Phi_i' \in \mathfrak{R}_4$，により張られる実ベクトル空間とする．$\mathfrak{R}_1$ 内の多様体 $\mathfrak{M}_1$ を $\mathfrak{M}_1 := \{ \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \in \mathfrak{R}_4 \mid [\Phi_1, \Phi_2] = 0, \ \Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{M}_4 \} = \{ \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \in \mathfrak{R}_4 \mid \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle^2 = 0, \ \Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{M}_4 \}$ として定義する．$\mathfrak{M}_1$ の元は（実スカラー倍を考えに入れないとき）点とよばれる．

標数 0 の体上の有限次元ベクトル空間 $\mathfrak{T}$ が次の条件を満足する三項積 $[\ ,\ ,\ ]$ に関して閉じているとき，$\mathfrak{T}$ は Lie triple system とよばれる：

(LT 1) $\qquad [aab]=0,$

(LT 2) $\qquad [abc]+[bca]+[cab]=0,$

(LT 3) $\qquad [ab[cde]]=[[abc]de]+[c[abd]e]+[cd[abe]].$

(LT3) は $\mathfrak{T}$ の一次写像 $L(a,b): x \longmapsto (abx)$ が $\mathfrak{T}$ の triple derivation であることを示している．(Lie triple system についてくわしくは [12, 18, 19] を参照して下さい．この講究録においても吉川氏が幾何学との関連において述べられると思います．また [16] を参照)． [,] を積にもつリー環 $\mathfrak{L}$ の部分空間 $\mathfrak{T}$ は $\mathfrak{L}$ 内の三項積 $[[a,b],c]$ に関して閉じておれば，この三項積に関して Lie triple system になる．このことより，リー環 $\mathcal{R}_4$ のベクトル部分空間 $\mathfrak{K} \oplus \mathfrak{K}$ は Lie triple system になる．実際，$\mathfrak{L}$ 内の三項積 $\left[\left[\ulcorner(0),\begin{pmatrix}P_1\\P_1'\end{pmatrix}\urcorner,\ \ulcorner(0),\begin{pmatrix}P_2\\P_2'\end{pmatrix}\urcorner\right],\ \ulcorner(0)\begin{pmatrix}P_3\\P_3'\end{pmatrix}\urcorner\right]$ の $\mathfrak{K}\oplus\mathfrak{K}$－成分を求めてみると次のようになる．

$$(*)\qquad \begin{pmatrix} (P_1\times P_2' - P_2\times P_1')P_3 - \frac{1}{8}(\{P_1,P_2'\}-\{P_2,P_1'\})P_3 + \frac{1}{4}\{P_1,P_2\}P_3' \\ (P_1\times P_2' - P_2\times P_1')P_3' + \frac{1}{8}(\{P_1,P_2'\}-\{P_2,P_1'\})P_3' - \frac{1}{4}\{P_1',P_2'\}P_3 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{R}_4$ が単純リー環であることから，$\mathfrak{T}$ は単純 Lie triple system となることが Lister [18] より出るが，ベクトル空間 $\mathfrak{T} := \mathfrak{K}\oplus\mathfrak{K}$ を考えて，$\mathfrak{T}$ 内の三項積を (*) によって定義すると，この積に関して $\mathfrak{T}$ は Lie triple system

になること，そして Lie triple system として単純であることが直接にも示される [26, 定理 1, より一般に定理 2]．以下特にことわらなければベクトル空間は標数 0 の体上の有限次元ベクトル空間とする．

リー環 $\mathrm{Inv}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{f} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J}$ の部分空間 $\mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J}$ は Lie triple subsystem になる．なぜならば $\Theta_i = \ulcorner 0, 0, A_i, B_i \urcorner \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{M})$, $i = 1, 2, 3$, に対し [5, §4, p.227] を用いると

$$[[\Theta_1, \Theta_2], \Theta_3] = \ulcorner 0, 0, A, B \urcorner,$$

ここで

$$A = 2\left\{ \langle A_2, B_1 \rangle - \frac{1}{3}(A_2, B_1) - \langle A_1, B_2 \rangle + \frac{1}{3}(A_1, B_2) \right\} A_3,$$

$$B = -2\left\{ \langle B_1, A_2 \rangle - \frac{1}{3}(B_1, A_2) - \langle B_2, A_1 \rangle + \frac{1}{3}(B_2, A_1) \right\} B_3,$$

となるからである．

generalized Jordan triple system とは次の条件をみたす triple system である [14, 15]：

(GJT) $\quad (ab(cde)) = ((abc)de) - (c(bad)e) + (cd(abe)).$

generalized Jordan triple system がさらに，次の条件 (JT) をみたすとき，それは単に Jordan triple system とよばれる：

(JT) $\quad (abc) = (cba).$

任意の Jordan algebra J は新しい三項積 $(abc) :=$

$a(bc)-b(ac)+(ab)c$ ，ここで ab は J における Jordan 積，に関して Jordan triple system になる．上述の例外 Jordan algebra $\mathfrak{J}$ において $(ABX):=\langle A,B\rangle X-\frac{1}{3}(A,B)X$ とおくと，$(ABX)=-\{A\circ(B\circ X)-B\circ(A\circ X)+(A\circ B)\circ X\}$ となるから，$\mathfrak{J}$ は三項積 (ABX) に関して Jordan triple system になる．$\mathfrak{J}$ において，$ABX:=\langle A,B\rangle X$ とおいた時は [5, §1 (1.20)] により，$\mathfrak{J}$ は三項積 ABX に関し generalized Jordan triple system になる．

1． ベクトル空間 $\mathfrak{R}\oplus\mathfrak{R}$ において，元 $\begin{pmatrix}P_i\\P_i'\end{pmatrix}$，$i=1,2,3$，の三項積 $\left[\begin{pmatrix}P_1\\P_1'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_2\\P_2'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_3\\P_3'\end{pmatrix}\right]$ を (*) によって定義すると，$\mathfrak{R}\oplus\mathfrak{R}$ は Lie triple system になることをのべた．$\Phi=\begin{pmatrix}P\\P'\end{pmatrix}\in\mathfrak{R}\oplus\mathfrak{R}$，$P=\ulcorner X,U,\xi,\omega\urcorner$，$P'=\ulcorner X',U',\xi',\omega'\urcorner$ に対し次の関係式が成立するとする：

(i) $[\Phi^*\ \Phi\ \Phi]=(\Phi^*,\Phi)\Phi$ for all $\Phi^*\in\mathfrak{R}\oplus\mathfrak{R}$，

ここで，(Φ^*,Φ) は Lie triple system $\mathfrak{R}\oplus\mathfrak{R}$ 上の対称双一次形式とする．すると次の関係式が成立する．

$$
\begin{aligned}
(X,U)&=3\xi\omega, & (X',U')&=3\xi'\omega',\\
X\times X&=\omega U, & X'\times X'&=\omega'U',\\
U\times U&=\xi X, & U'\times U'&=\xi'X',\\
\langle X,U\rangle&=0, & \langle X',U'\rangle&=0,
\end{aligned}
$$

$$(X,\ U') = 3\xi'\omega = (X',\ U) = 3\xi\omega',$$

$$(X, A)X' = (X', A)X, \qquad (U, A)U' = (U', A)U,$$

$$(U, A)X' = (U', A)X, \qquad (X, A)U' = (X', A)U,$$

$$X \times X' = \omega' U, \qquad U \times U' = \xi X',$$

$$\omega X' = \omega' X, \qquad \xi X' = \xi' X,$$

$$\omega U' = \omega' U, \qquad \xi U' = \xi' U,$$

$$\xi'\omega = \xi\omega', \qquad \langle X', U\rangle + \langle X, U'\rangle = 0.$$

これの証明には，写像 $\Phi^* \longmapsto [\Phi^*\Phi\Phi]$ において Φ^* が次の形である場合に適用するとよい．

$$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\\(0)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\\(0)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\\(0)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\U_1\\0\\0\end{pmatrix}\\(0)\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}(0)\\\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}(0)\\\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}(0)\\\begin{pmatrix}X_1'\\0\\0\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}(0)\\\begin{pmatrix}0\\U_1'\\0\\0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

系として，もし $\begin{pmatrix}P\\P'\end{pmatrix} \in \mathfrak{R} \oplus \mathfrak{R}$ が条件 (i) をみたすならば，かかるものの projection P および P' の全体は共に多様体 $\mathfrak{M}$ である．

2. Freudenthal による例外単純リー環の構成に用いられたベクトル空間 $\mathfrak{R}$ の代数的構造を抽象化するときに基本となるのは次の5個の基本性質であろう．

$$P \times Q = Q \times P,$$

$$\{P, Q\} + \{Q, P\} = 0,$$

$$(P\times Q)R-(P\times R)Q+\frac{1}{8}\{P,Q\}R-\frac{1}{8}\{P,R\}Q-\frac{1}{4}\{Q,R\}P=0,$$

$$\{(P\times Q)R,S\}+\{R,(P\times Q)S\}=0,$$

$$[P\times Q,\ R\times S]=(P\times Q)R\times S+R\times(P\times Q)S.$$

筆者には始め三項積 $(P\times Q)R$ と交代形式 $\{P,Q\}$ とは異質なものに思え，かつ $\{P,Q\}$ が非退化であることから $(PQR):=(P\times Q)R$ を積にもつ三項系 R が単純であることが上の第3式を用いて導びかれるので，上の5個の条件を公理として仮定することは条件が少しきつすぎるのでないかと思われて form を含まない第1，第5の条件のみをみたす三項系（F-system）を考えた [24]．しかし，浅野氏は上の条件を次のようにまとめられた [2, 26]．

三項積 $\{abc\}$ と non-zero な双一次交代形式 $\langle a,b\rangle$ をもつ triple system S は次の条件をみたすとき symplectic triple system とよばれる：

$(S\ 1)$ $$\{abc\}=\{bac\},$$

$(S\ 2)$ $$\{abc\}-\{acb\}+\langle a,b\rangle c-\langle a,c\rangle b-2\langle b,c\rangle a=0,$$

$(S\ 3)$ $$\{ab\{cde\}\}=\{\{abc\}de\}+\{c\{abd\}e\}+\{cd\{abe\}\}.$$

条件 $(S3)$ は一次写像 $x\longmapsto\{abx\}$ が S の triple derivation であることを意味する．もし，S の基礎体の標数 $\neq 2, 3$ の場合には，条件 $(S1)$, $(S2)$, $(S3)$ は $(S1)$, $(S2)'$, $(S3)'$ に同値である．

(S2)′ $\quad \{aab\} - \{baa\} = 3\langle a, b\rangle a,$

(S3)′ $\quad \{aa\{bbc\}\} = 2\{\{aab\}bc\} + \{bb\{aac\}\}.$

$\mathfrak{K} = J \oplus J \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ において，三項積 $\{PQR\}$ を $(P \times Q)R$，$\mathfrak{K}$ 上の交代形式を $\frac{1}{8}\{P, Q\}$ として定義すると，$\mathfrak{K}$ は symplectic triple system になる．

[註] (S2)′ により [5, §6 (6.1)] の証明には任意の P，Q に対し $(P \times P)Q - (P \times Q)P = \frac{3}{8}\{P, Q\}P$ が成立することを示せばよい．

Faulkner and Ferrar [4] における symplectic algebra の定義において，三項積 abc を (bca) とおくことにする．

定義 (Faulkner and Ferrar) 標数 $\neq 2, 3$ の体上の積 (abc) をもつ三項系 M が symplectic algebra であるとは $L(a, b) : x \longmapsto (abx)$，$U(a, b) : x \longmapsto (axb)$ とおくとき，次の三条件をみたすものである．

(SA 1) $\quad -L(a,b) + L(b, a) = U(a,b) - U(b, a)$ ($= K(a, b)$ とおく),

(SA 2) $\quad L(c,d)K(a,b) = K(a,b)L(c,d) = L(K(a,b)c, d) = L(c, K(a,b)d),$

(SA 3) $\quad [L(a,b), L(c,d)] = L((abc), d) + L(c, (bad)).$

[注意] (SA 1) と (SA 3) より $[K(a, b), L(c, d)] = 0 \Leftrightarrow L(K(a, b)c, d) = L(c, K(a, b)d)$．したがって，条件 (SA 2) において4個の項の内，三つが等しければ残りの第4の項もそれらに等しくなる．

積 $\{abc\}$ をもつ symplectic triple system は積 (abc) $:= \{abc\} - \langle a, b\rangle c$ に関して symplectic algebra になり，$K(a, b)x = 2\langle a, b\rangle x$ となるので $\sum_i K(a_i, b_i)$ によって張られるベクトル空間は1次元である．

Faulkner and Ferrar は symplectic algebra M が更に，$K(a, b) = \langle a, b\rangle Id$，$\langle\ ,\ \rangle$ は M 上の交代双一次形式，をみたすとき，それを balanced symplectic algebra とよんだ（[3] を参照）．したがって，symplectic triple system は balanced symplectic algebra の構造をもつ．逆に，balanced symplectic algebra M が与えられたとき，$\{abc\} := \frac{1}{2}\{(abc) + (bac)\}$ とおくと，M は三項積 $\{abc\}$ と交代形式 $\frac{1}{2}\langle a, b\rangle$ に関して symplectic triple system になる．

例．$\mathfrak{K} = \mathfrak{J} \oplus \mathfrak{J} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ から定まる symplectic algebra において，元 $P_i = \ulcorner X_i, u_i, \xi_i, \omega_i \urcorner$ に対する三項積

$$(P_1\ P_2\ P_3) := (P_1 \times P_2)P_3 - \frac{1}{8}\{P_1, P_2\}P_3$$

は次のようになる．

$$\frac{1}{2}\ulcorner X, U, \xi, \omega \urcorner,$$

ここで，

$$X = 2(X_1 \times X_2) \times U_3 + 2(X_2 \times X_3) \times U_1 + 2(X_3 \times X_1) \times U_2$$
$$- \omega_1(U_2 \times U_3) - \omega_2(U_3 \times U_1) - \omega_3(U_1 \times U_2)$$

$$-\tfrac{1}{2}((x_3, u_2) - \omega_3 \xi_2) x_1 \quad -\tfrac{1}{2}((x_3, u_1) - \omega_3 \xi_1) x_2$$
$$-\tfrac{1}{2}((x_1, u_2) - \omega_1 \xi_2) x_3 ,$$

$$u = -2(u_1 \times u_2) \times x_3 - 2(u_2 \times u_3) \times x_1 - 2(u_3 \times u_1) \times x_2$$
$$+ \xi_1 (x_2 \times x_3) + \xi_2 (x_3 \times x_1) + \xi_3 (x_1 \times x_2)$$
$$+ \tfrac{1}{2}((u_3, x_2) - \xi_3 \omega_2) u_1 + \tfrac{1}{2}((u_3, x_1) - \xi_3 \omega_1) u_2$$
$$+ \tfrac{1}{2}((u_1, x_2) - \xi_1 \omega_2) u_3 ,$$

$$\xi = -(u_1 \times u_2, u_3) + \tfrac{1}{2}\xi_1 (x_2, u_3) + \tfrac{1}{2}\xi_2 (x_1, u_3)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\xi_3 (x_2, u_1) - \xi_1 \xi_3 \omega_2 - \tfrac{1}{2}\xi_2 \xi_3 \omega_1 ,$$

$$\omega = (x_1 \times x_2, x_3) - \tfrac{1}{2}\omega_1 (u_2, x_3) - \tfrac{1}{2}\omega_2 (u_1, x_3)$$
$$- \tfrac{1}{2}\omega_3 (u_2, x_1) + \omega_1 \omega_3 \xi_2 + \tfrac{1}{2}\omega_2 \omega_3 \xi_1 ,$$

[3, 4 を参照].

3. $\mathcal{J}$-ternary algebra は M. Koecher の構成 [17] を含むように B. N. Allison [1] と W. Hein [10, 11] により独立に定義された概念である (Hein は始めこれを admissible situation とよんだ).

定義 (Allison, Hein) $\mathcal{J}$ を標数 $\neq 2, 3$ の体 k 上の有限次元の単位元 e をもつ Jordan algebra (積を xy で示す) とする. $\mathcal{S}$ は k 上の積 (abc) をもつ三項系で, Jordan algebra $\mathcal{J}$ の特殊表現モヂュールとする, 即ち, $\sigma : \mathcal{J} \to \mathrm{Hom}_k(\mathcal{S})$ が存在して次の 2 条件をみたす:

(J-T 1) $\qquad \sigma(xy) = \frac{1}{2}(\sigma(x)\sigma(y) + \sigma(y)\sigma(x))$,

(J-T 2) $\qquad \sigma(e) = \mathrm{Id}_{\mathfrak{M}}$.

さらに，$\mathfrak{M}$ から $\mathfrak{J}$ への交代双一次写像 $f : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{J}$ が存在して以下の条件をみたすものとする：

(J-T 3) $\qquad [L(a,b), L(c,d)] = L((abc), d) + L(c, (bad))$,

(J-T 4) $\qquad (abc) - (cba) = (L(c,a) - L(a,c))(b)$,

(J-T 5) $\qquad (abc) - (cba) = \sigma f(c,a)(b)$,

(J-T 6) $\qquad x f(a,b) = \frac{1}{2}\{f(\sigma(x)a, b) + f(a, \sigma(x)b)\}$,

(J-T 7) $\qquad [\sigma(x), L(a,b)] = L(\sigma(x)a, b) - L(a, \sigma(x)b)$,

(J-T 8) $\qquad f((abc), d) + f(c, (abd)) = f(a, \sigma f(c,d)b)$,

$x, y \in \mathfrak{J}$, $a, b, c, d \in \mathfrak{M}$．ただし，$L(a,b)$ は $\mathfrak{M}$ での左側積 $x \longmapsto (abx)$ を示す．このとき，$(\mathfrak{J}, \mathfrak{M}, \sigma, f)$ または単に $\mathfrak{M}$ を $\mathfrak{J}$-ternary algebra という．

[註] $\mathfrak{J}$-ternary algebra の定義において，(J-T ; 1, 3, 4, 5, 6) より

$$\sigma f(L(a,b)c, d) + \sigma f(c, L(a,b)d) = \sigma f(a, \sigma f(c,d)b)$$

が導びかれる．これから，$\mathfrak{J}$ の表現 σ が faithful であるとき，(J-T 8) はこれら5個の仮定より導びかれる．

ここでは，表現空間 $\mathfrak{M}$ の方に重点をおいて上の公理の reformation をしてみる（$K(a,b) := -\sigma f(a,b)$ とおいて，(J-T 1)，(J-T, 4, 5)，(J-T, 1, 6) からそれぞれ次の (

AH 1), (AH 2), (AH 3) とする).

積 (abc) をもつ三項系 T において, $L(a,b): x \mapsto (abx)$, $K(a,b): x \mapsto (axb)-(bxa)$ とおく. 次の3条件がみたされるとき, T は Allison-Hein triple system という.

(AH 1) $\quad [L(a,b), L(c,d)] = L((abc),d) + L(c,(bad))$,

(AH 2) $\quad -L(a,b) + L(b,a) = K(a,b)$,

(AH 3) $\quad K(a,b)K(c,d) + K(c,d)K(a,b)$

$$= K(K(a,b)c, d) + K(c, K(a,b)d).$$

$K(a,b)=0$ のときは, T の一次写像 $x \mapsto (abx)$ は T の triple derivation である. J-ternary algebra は Allison-Hein triple system である. 積 (abc) をもつ symplectic algebra はこの積に関して Allison-Hein triple system である. V をその次元 $\geqq 2$ なるベクトル空間, $\langle , \rangle$ を V 上の交代形式とすると, V は積 $(abc) := \langle b, c\rangle a$ に関して Allison-Hein triple system であるが, 一般には symplectic algebra でない.

もし, Allison-Hein triple system において, $K(a,b) = \langle a,b\rangle \mathrm{Id}$, $\langle a,b\rangle$ は基礎体の元, が成立つときは Allison-Hein triple system の条件は balanced symplectic algebra の条件に reduce する. J-ternary algebra と symplectic triple system との関係については Kakiichi [13] を参照.

symplectic triple system から導びかれる Allison-Hein triple system において，$\sum K(a_i, b_i)$ により張られるベクトル空間は1次元であるので一般の次元の場合になるようにするためには symplectic triple system の定義を次のように一般化すればよい．

$\tilde{S}$ を2つの trilinear な積 $\{abc\}$ と $\langle abc\rangle$ をもつ system で次の条件をみたすものとする．

$$\{abc\} = \{bac\}, \quad \langle abc\rangle = -\langle bac\rangle,$$

$\lambda(a, b) : x \longmapsto \{abx\}$, $\mu(a, b) : x \longmapsto \langle abx\rangle$ とおくとき，

$$\{abc\} - \{acb\} + \langle abc\rangle - \langle acb\rangle - 2\langle bca\rangle = 0,$$

$$[\lambda(a,b), \ \lambda(c,d)] = \lambda(\{abc\}, d) + \lambda(c, \{abd\}),$$

$$[\lambda(a,b), \ \mu(c,d)] = \mu(\{abc\}, d) + \mu(c, \{abd\}),$$

$$[\mu(a,b), \ \lambda(c,d)] = -\mu(\langle abc\rangle, d) + \mu(c, \langle abd\rangle),$$

$$[\mu(a,b), \ \mu(c,d)] = -\lambda(\langle abc\rangle, d) + \lambda(c, \langle abd\rangle),$$

$$\mu(a,b)\mu(c,d) + \mu(c,d)\mu(a,b) = \mu(\langle abc\rangle, d) + \mu(c, \langle abd\rangle).$$

$\tilde{S}$ において $\langle abx\rangle = \langle a, b\rangle x$，$\langle a, b\rangle$ は基礎体の元，がつねに成立すれば，上の条件式は symplectic triple system の条件式 (S1), (S2), (S3) に reduce する．$\tilde{S}$ は積 $(abc) := \{abc\} - \langle abc\rangle$ に関して Allison-Hein triple system になり，逆に Allison-Hein triple system は $\{abc\} := \frac{1}{2}((abc) + (bac))$，$\langle abc\rangle := \frac{1}{2}(-(abc) + (bac))$ に

関して，system $\widetilde{S}$ になる．

4．この節で I. L. Kantor によって定義された generalized Jordan triple system of second order のアナロジーとして，Allison-Hein triple system を一般化する．体 k 上の積 (abc) をもつ三項系 $\mathfrak{U}(\varepsilon)$, $\varepsilon = \pm 1$，を次の条件をみたすものとして定義する．

$(\mathfrak{U}\,1)$ $\quad (ab(cde)) = ((abc)de) + \varepsilon(c(bad)e) + (cd(abe))$,

$(\mathfrak{U}\,2)$ $\quad \mathrm{Alt}_{a,b}\{((acb)ed) - (de(acb)) - (dc(aeb)) + \varepsilon(a(cde)b)\} = 0$,

ただし，$\mathrm{Alt}_{a,b}[\cdots]$ は a と b に関する交代化を示す．$\varepsilon = -1$ のときは上の2条件は Kantor による2次の generalized Jordan triple system の定義式である．$\varepsilon = 1$ のとき，$\mathfrak{U}(1)$ を Freudenthal-Kantor triple system とよぶ．

［註］$(\mathfrak{U}1)$ は J. R. Faulkner, On the geometry of inner ideals, J. of Algebra, 26, 1−9 (1973) に (1.5) としてでている．

$L(a,b): x \longmapsto (abx)$, $K(a,b): x \longmapsto \mathrm{Alt}_{a,b}(axb) = (axb) - (bxa)$ を用いると，$(\mathfrak{U}1)$，$(\mathfrak{U}2)$ は次のようにかける．

$(\mathfrak{U}1)'$ $\quad [L(a,b), L(c,d)] = L((abc),d) + \varepsilon L(c,(bad))$,

$(\mathfrak{U}2)'$ $\quad K(K(a,b)c, d) - L(d,c)K(a,b) + \varepsilon K(a,b)L(c,d) = 0$.

定理　(標数 $\neq 2$ の体上の) Allison-Hein triple system T は同じ積に関して Freudenthal-Kantor triple system

である．とくに，J-ternary algebra もそうである．

［証］ 仮定（AH 1, 2）より容易に関係式 (α): $[K(a,b), L(c,d)] = L(K(a,b)c, d) - L(c, K(a,b)d)$, (β): $[K(a,b), K(c,d)] = -L(K(a,b)c, d) - L(d, K(a,b)c) + L(K(a,b)d, c) + L(c, K(a,b)d)$ をうる． (β) と（AH 3）より

(γ) $\quad K(a,b)K(c,d) = -L(K(a,b)c, d) + L(K(a,b)d, c)$.

これから，(α)，(γ)，（AH 2）を用いて，（口 2）$'$ の左辺 $= K(K(a,b)c, d) + [K(a,b), L(d,c)] - K(a,b)(-L(c,d) + L(d,c)) = 0$ が導びかれる．

命題 Freudenthal-Kantor triple system $U(1)$ が Allison-Hein triple system に reduce するための必要十分条件は $U(1)$ において（AH 2）が成立つことである．

$U(1)$ において，$K(a,b) = \langle a, b\rangle \mathrm{Id}$, $\langle a, b\rangle \in k$, $\langle\ ,\ \rangle \neq 0$ がつねに成立つときは，公理（口 2）$'$ から（AH 2）が導びかれる．ゆえに，この場合は symplectic algebra, Allison-Hein triple system の概念は Freudenthal-Kantor triple system のそれに一致して balanced symplectic algebra になる．

例 V をベクトル空間，$(\ ,\ )$ を V 上の双一次形式で $(a, b) = -\varepsilon(b, a)$, $(\varepsilon = \pm 1)$ をみたすものとすると，V は積 $(abc) := (b, c)a$ に関して triple system $U(\varepsilon)$ になる．

例　Vをベクトル空間，$\langle\ ,\ \rangle$ をV上の交代双一次形式とする．Vは積 $(abc) := \langle b, c\rangle a - \langle a, b\rangle c$ に関して Freudenthal－Kantor triple system になるが必ずしも Allison－Hein triple system ではない．

定理　triple system $U(\varepsilon)$ において，$L(a,b): x \mapsto (abx)$, $M(a,b): x \mapsto (axb)$, $R(a,b): x \mapsto (xab)$, $\lambda(a,b) := \frac{1}{2}(L(a,b) + \varepsilon L(b,a))$ $(= \varepsilon\lambda(b,a))$ とおくと，次の関係式が成立つ．

(i)　$R(a,(bcd)) = R(c,d)R(a,b) + \varepsilon M(b,d)M(a,c) + L(b,c)R(a,d)$,

(ii)　$M(a,(bcd)) = R(c,d)M(a,b) + \varepsilon M(b,d)R(a,c) + L(b,c)M(a,d)$,

(iii)　$[\lambda(a,b), L(c,d)] = L(\lambda(a,b)c, d) + L(c, \lambda(a,b)d)$,

(iv)　$[\lambda(a,b), \lambda(c,d)] = \lambda(\lambda(a,b)c, d) + \lambda(c, \lambda(a,b)d)$,

(v)　$L(a,b)M(c,d) - \varepsilon M(c,d)L(b,a) = M((abc),d) + M(c,(abd))$,

(vi)　$L(a,b)K(c,d) - \varepsilon K(c,d)L(b,a) = K((abc),d) + K(c,(abd))$,

(vii)　$[\lambda(a,b), M(c,d)] = M(\lambda(a,b)c, d) + M(c, \lambda(a,b)d)$,

(viii)　$[\lambda(a,b), K(c,d)] = K(\lambda(a,b)c, d) + K(c, \lambda(a,b)d)$,

(ix)　$[L(a,b), R(c,d)] = \varepsilon R((bac),d) + R(c,(abd))$,

(x)　$[\lambda(a,b), R(c,d)] = R(\lambda(a,b)c, d) + R(c, \lambda(a,b)d)$,

(xi)　$L((abc),d) + L((cda),b) + \varepsilon L(c,(bad)) + \varepsilon L(a,(dcb)) = 0$,

(xii)　$L(K(a,b)c, d) - L(K(a,b)d, c) = \varepsilon L(a, K(c,d)b) - \varepsilon L(b, K(c,d)a)$,

(xiii) $(R(a,b)-L(b,a))K(c,d) - M(b, K(c,d)a) + \varepsilon K(c,d)R(b,a) = 0,$

(xiv) $K((abc), d) + K(c, (abd)) + K(a, K(c,d)b) = 0,$

(xv) $$\varepsilon K(a,b)M(c,d) + L(K(a,b)c, d) - R(d, K(a,b)c) - R(c, K(a,b)d) = 0,$$

(xvi) $$(R(a,b)-L(b,a))(R(c,d)-L(d,c)) - L(b,c)(R(a,d)-L(d,a)) + \varepsilon(R((cba), d) - L(d, (cba))) = 0,$$

(xvii) $2\varepsilon[K(a,b), \lambda(c,d)] + K(K(a,b)c, d) + \varepsilon K(K(a,b)d, c) = 0,$

(xviii) $\varepsilon K(a,b)K(c,d) + L(K(a,b)c, d) - L(K(a,b)d, c) = 0,$

(xix) $K(a,b)K(c,d) + L(a, K(c,d)b) - L(b, K(c,d)a) = 0,$

(xx) $[K(a,b), K(c,d)] + 2\varepsilon(\lambda(K(a,b)c, d) - \lambda(K(a,b)d, c)) = 0,$

(xxi) $$[K(a,b)\ [K(c,d), K(e,f)]] = K(K(a,b)K(c,d)e, f) - \varepsilon K(K(a,b)e, K(c,d)f) - \varepsilon K(K(c,d)e, K(a,b)f) + K(e, K(a,b)K(c,d)f),$$

(xxii) $$[[K(a,b), K(c,d)]\ K(e,f)] = K([K(a,b), K(c,d)]e, f) + K(e, [K(a,b), K(c,d)]f).$$

[注意] 定理の (i), (ii), (vi), (x) のいずれも公理(Ⅱ1)を特性づけ, (xiv), (xvii), (xviii) のいずれも公理(Ⅱ2)を特性づける. (iv) より $\lambda(a,b)$ は system $\mathcal{U}(\varepsilon)$ の triple derivation である.

系. $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ をそれぞれ一次写像 $\sum_i \lambda(a_i, b_i)$ と $\sum_i$

$K(a_i, b_i)$ とで張られるベクトル空間とする。ベクトル空間としての直和 $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{K}$ はリー環で $\mathfrak{K}$ は Lie triple system である。

2次の generalized Jordan triple system $\mathcal{U}(-1)$ に対して Kantor は Lie triple product および enveloping (graded) Lie algebra を定義した [15, Proposition 1]. symplectic algebra に対する Faulkner と Ferrar による，および $\mathcal{J}$-ternary algebra に対する Hein による Lie triple system の構成は Freudenthal-Kantor triple system $\mathcal{U}(1)$ に対しても成立する（また [24], [25], [26] を参照）.

$\mathfrak{T} := \mathcal{U}(\varepsilon) \oplus \mathcal{U}(\varepsilon)$（ベクトル空間としての直和）とおき，$\mathfrak{T}$ の元を $a \oplus b$ またはベクトルの形で $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と表わす. $\mathfrak{T}$ 内の三項積は次により定義される：

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] := \begin{pmatrix} L(a_1, b_2)a_3 - L(a_2, b_1)a_3 + K(a_1, a_2)b_3 \\ \varepsilon L(b_2, a_1)b_3 - \varepsilon L(b_1, a_2)b_3 - \varepsilon K(b_1, b_2)a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} L(a_1, b_2) - L(a_2, b_1) & K(a_1, a_2) \\ -\varepsilon K(b_1, b_2) & \varepsilon L(b_2, a_1) - \varepsilon L(b_1, a_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

ただし，$a_i, b_i \in \mathcal{U}(\varepsilon)$. すると上の定理の関係式を用いて直接計算により $\mathfrak{T}$ はこの三項積に関して Lie triple system

であることがわかる. Lie triple system $\mathfrak{T}$ において, 次が成立する.

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} (abc) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$-\varepsilon\left[\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ (abc) \end{pmatrix},$$

$$[\,\mathcal{U}(\varepsilon)\oplus(0),\ (0)\oplus\mathcal{U}(\varepsilon),\ \mathcal{U}(\varepsilon)\oplus(0)\,] \subset \mathcal{U}(\varepsilon)\oplus(0),$$

$$[\,\mathcal{U}(\varepsilon)\oplus(0),\ (0)\oplus\mathcal{U}(\varepsilon),\ (0)\oplus\mathcal{U}(\varepsilon)\,] \subset (0)\oplus\mathcal{U}(\varepsilon),$$

$$[\,\mathcal{U}(\varepsilon)\oplus(0),\ \mathcal{U}(\varepsilon)\oplus(0),\ \mathcal{U}(\varepsilon)\oplus(0)\,] = (0)\oplus(0)$$

$\varepsilon = -1$ のとき: $\mathcal{U}(-1)$ が Jordan triple system であるときは, 次が成立つ.

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$\varepsilon = 1$ のとき: $\mathcal{U}(1)$ が Allison-Hein triple system であるときは, 次が成立つ.

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{U}(1)$ が symplectic algebra のときには, さらに

$$\left[\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right]\right] = -\left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}\right]\right]$$

$$=\left[\left[\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\right]=\left[\left[\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}\right]$$

が成立ち, balanced のときには,

$$\left[\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}\right]=\langle a,b\rangle\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$$

が成立する. $\mathcal{U}(1)$ が symplectic triple system から $(abc):=\{abc\}-\langle a,b\rangle c$ によって導びかれた所の symplectic algebra のときは, 次が成立する.

$$-\left[\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}\right]+\left[\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}\right]=2\langle a,b\rangle\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}.$$

Lie triple system $\mathfrak{T}=\mathcal{U}(\varepsilon)\oplus\mathcal{U}(\varepsilon)$ において, 一次写像 $U=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$ は $\mathfrak{T}$ の微分である.

命題 [cf. 11, 2.2 Lemma] Lie triple system $\mathfrak{T}=\mathcal{U}(1)\oplus\mathcal{U}(1)$ において, 次の3条件は等値である:

(i) $K(a,b)=-L(a,b)+L(b,a)$ for all $a,b\in\mathcal{U}(1)$.

(ii) 一次写像 $V=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}b\\0\end{pmatrix}$ は $\mathfrak{T}$ の微分.

(iii) 一次写像 $W=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix}$ は $\mathfrak{T}$ の微分.

したがって, Freudenthal-Kantor triple system $\mathcal{U}(1)$ が Allison-Hein triple system になる必要十分条件は $\mathcal{U}(1)$ から上の方法で Lie triple system を構成したとき, そこで V または W が Lie triple system として

ての微分になることである．

次に Lie triple system の内での $\mathcal{U}(\varepsilon)$, Jordan triple system, Allison-Hein triple system, symplectic algebra, symplectic triple system の特性づけを与える，これは本質的に Hein [11, 2.3 Satz] の証明に負う．

ベクトル空間 $\mathfrak{g} = U \oplus \overline{U}$ が Lie triple system で次の条件をみたす $\mathfrak{g}$ の一次写像 f が存在すると仮定する．

(1) $f(U) = \overline{U}, \quad f(\overline{U}) = (0)$,

(2) $[U\ \overline{U}\ U] \subset U$,

(3) $[U\ \overline{U}\ \overline{U}] \subset \overline{U}$,

(4) $[U\ U\ U] = (0)$,

任意の $x \in U$ に対して $\overline{x} := f(x)$ とおくとき，

(5) $\overline{[a\ \overline{b}\ c]} = -\varepsilon[\overline{a}\ b\ \overline{c}]$ for all $a, b, c \in U$,

ここで $\varepsilon = \pm 1$．

<u>補題</u>　仮定 (1), (2), $\cdots$, (5) のもとで次が成立つ．

(i) $[U\ U\ \overline{U}] \subset U$,

(ii) $[\overline{U}\ \overline{U}\ U] \subset \overline{U}$,

(iii) $\overline{[a\ b\ \overline{c}]} = -\varepsilon[\overline{a}\ \overline{b}\ c]$.

仮定 (1), (2), $\cdots$, (5) のもとで

$$(a\,b\,c) := [a\ \overline{b}\ c] \quad \text{for } a, b, c \in U$$

とおくと，ベクトル空間 U は積 (abc) に関して triple

system $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ になる．

［証］ 一次写像 $x \longmapsto [a\bar{b}x]$ は $\mathfrak{U}$ の微分であることから，$(\mathfrak{U}1)$ の左辺 $= [a\bar{b}[c\bar{d}e]] - [[a\bar{b}c]\bar{d}e] + [c[a\bar{b}\bar{d}]e] - [c\bar{d}[a\bar{b}e]] = 0$．次に $(axb) - (bxa) = [ab\bar{x}]$ であることに注意して，$(\mathfrak{U}2)$ の左辺 $= [[ab\bar{x}]\bar{y}z] - [z\bar{y}[ab\bar{x}]] - [z\bar{x}[ab\bar{y}]] - [ab[\bar{x}z\bar{y}]] = [[ab\bar{x}]z\bar{y}] + [\bar{x}z[ab\bar{y}]] - [ab[\bar{x}z\bar{y}]] = 0$ が $x \longmapsto [abx]$ が $\mathfrak{U}$ の微分であることと (4) を用いて導びかれる．

同様にして以下の結果が得られる．

$\varepsilon = -1$ のとき：

(6) $\qquad [ab\bar{c}] = 0 \qquad \text{for all } a, b, c \in \mathfrak{U}$

と仮定すると，仮定 (1), (2), …, (6) のもとで $\mathfrak{U}$ は Jordan triple system になる．

$\varepsilon = 1$ のとき：

(7) $\qquad [\bar{a}bc] + [a\bar{b}c] + [ab\bar{c}] = 0$

と仮定すると，仮定 (1), (2), …, (5), (7) のもとで，$\mathfrak{U}$ は Allison-Hein triple system になる．さらに次を仮定する．

(8)
$$\begin{aligned} &[c\bar{d}[ab\bar{x}]] = -[ab[\bar{c}d\bar{x}]] \\ &= [[ab\bar{c}]\bar{d}x] = [[\bar{a}\bar{b}d]\bar{c}\bar{x}] \end{aligned}$$

条件 (1), (2), …, (5), (7), (8) のもとで，$\mathfrak{U}$ は symplectic algebra になる．また，次を仮定する．

(9) $$-[a\bar{b}c]+[b\bar{a}c]=\langle a,b\rangle c$$

すなわち，

$$[ab\bar{c}]=\langle a,b\rangle c,$$

ただし，$\langle\,,\,\rangle$ は $\mathfrak{U}$ 上の交代双一次形式．条件 (1), (2), $\cdots$, (5), (7), (9) のもとで $\mathfrak{U}$ は balanced symplectic algebra になる．もし，$\mathfrak{U}$ 内の積を $\{abc\}:=\frac{1}{2}([a\bar{b}c]+[b\bar{a}c])$ によって定義すると，$\mathfrak{U}$ は積 $\{abc\}$ と (9) からの交代形式 $\frac{1}{2}\langle a,b\rangle$ に関して symplectic triple system になる．

triple system $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ から Lie triple system $\mathfrak{T}=\mathcal{U}(\mathcal{E})\oplus\mathcal{U}(\mathcal{E})$ を上のように定め，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{T}$ の standard enveloping Lie algebra とする：$\mathfrak{g}=\mathfrak{T}\oplus\mathfrak{D}(\mathfrak{T})$，$\mathfrak{D}(\mathfrak{T})$ は $\mathfrak{T}$ の内部微分のなす Lie algebra を示す．すると $\mathfrak{g}$ は graded Lie algebra になる．

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-2}\oplus\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2,$$

$$[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]\subset\mathfrak{g}_{i+j},$$

ここで，$L(t_1,t_2)$ を $\mathfrak{T}$ の内部微分 $t\longmapsto[t_1t_2t]$ とするとき $\mathfrak{g}_i$ は次のようである．

$\mathfrak{g}_{-2}$ ： $\sum_i L\left(\binom{a_i}{0},\binom{b_i}{0}\right)$ なる形の微分により張られるベクトル空間

$\mathfrak{g}_{-1} \;=\; \mathfrak{U}(\varepsilon) \oplus (0)$

$\mathfrak{g}_0 \;:\; \sum_i L\left(\begin{pmatrix} a_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b_i \end{pmatrix}\right)$ なる形の微分により張られるベクトル空間

$\mathfrak{g}_1 \;=\; (0) \oplus \mathfrak{U}(\varepsilon)$

$\mathfrak{g}_2 \;:\; \sum_i L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ a_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b_i \end{pmatrix}\right)$ なる形の微分により張られるベクトル空間.

浅野氏は symplectic triple system $\mathfrak{S}$ 上の交代形式 $\langle\, , \rangle$ と $\mathfrak{S}$ から導びかれる Lie triple system の Killing 形式との関係をしらべられた [2], 同氏の方法は $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ に対してもそのまま成立つ.

triple system $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ 上の双一次形式 γ を次により定義する.

$$\gamma(a, b) := \frac{1}{2}\, sp\,[\,2(R(a,b) - \varepsilon R(b,a)) + \varepsilon L(a,b) - L(b,a)\,],$$

ただし, $L(a, b)$ および $R(a, b)$ は $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ における左一, 右側積である. $\gamma(a, b) = -\varepsilon\,\gamma(b, a)$ が成立つ.

Lie triple system 上の Killing 形式 α は

$$\alpha(a, b) = \frac{1}{2}\, sp\,[\,R(a, b) + R(b, a)\,]$$

により定義される [19, 20, 22] (ここでは Ravisankar の式による).

triple system $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ 上の形式 γ と $\mathfrak{U}(\varepsilon)$ から導びかれる Lie triple system $\mathfrak{T} = \mathfrak{U}(\varepsilon) \oplus \mathfrak{U}(\varepsilon)$ の Killing 形式 α

との関係は

$$\alpha\left(\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2}sp\Big[2\{R(b_1,a_2)-\varepsilon R(a_2,b_1)\}+\varepsilon L(b_1,a_2)$$
$$-L(a_2,b_1)+2\{R(b_2,a_1)-\varepsilon R(a_1,b_2)\}$$
$$+\varepsilon L(b_2,a_1)-L(a_1,b_2)\Big]$$
$$=\gamma(b_1,a_2)+\gamma(b_2,a_1),$$

となり，これから次の結果を得る．

定理　triple system $U(\varepsilon)$ に associate された Lie triple system $\mathfrak{T}=U(\varepsilon)\oplus U(\varepsilon)$ に対して，形式 γ が非退化であることと，$\mathfrak{T}$ の Killing 形式が非退化であることとは等値である．

例　J を積 ab をもつ Jordan algebra とすると，J は積 $(abc):=a(bc)-b(ac)+(ab)c$ に関して Jordan triple system である．$\gamma(a,b)=sp\,L(ab)$，ただし，$L(a)$ は J における左側積 $x\mapsto ax$ である．

(H. Asano)　symplectic triple system S から $(abc):=\{abc\}-\langle a,b\rangle c$ により導びかれた Freudenthal-Kantor triple system $U(1)$ において，$\gamma(a,b)=(\dim S+4)\langle a,b\rangle$.

5．Allison-Hein triple system T において，次

が成立つ．

$$(R(a,b)-R(b,a))x = K(a,b)x - K(b,x)a - K(x,a)(b),$$

$\mathfrak{M} := \{a \in T \mid L(a,a) = 0\}$　とおくと，

$a \in \mathfrak{M}$, $K(a,b)=0$ $\Rightarrow$ $(aba) = (baa) = 0$,

$a \in \mathfrak{M}$, $K(a,b)=0$, $[L(a,b), K(a,x)]=0$ $\Rightarrow$ $K(a, xba)=0$,

$a, b \in \mathfrak{M}$, $K(a,b)=0$, $[L(a,b), K(b,x)]=0$ $\Rightarrow$ $(a(bxb)a)=0$.

これらから，

定理　Allison-Hein triple system T において，$\mathfrak{M} :=$ $\{a \in T \mid L(a,a)=0\}$　とおく．$a, b \in \mathfrak{M}$ に対して

$$K(a,b)=0,\ [L(a,b), K(a,x)] = [L(a,b), K(b,x)] = 0$$

が任意の $x \in T$ に対して成立するならば，$(L(a,b))^2 = 0$

が成立つ．

系　symplectic algebra M において，$a, b \in \mathfrak{M}$ に対し　$K(a,b)=0$　ならば　$(L(a,b))^2 = 0$．

系（Freudenthal）　5-dim. symplectic geometry において，$P, Q \in \mathfrak{M} = \{P \in \mathfrak{K} \mid P \times P = 0\}$，$\{P, Q\}=0$ ならば　$(P \times Q)^2 = 0$，すなわち，P と Q が交わる二平面のとき（$P \times Q \neq 0$ ならば）$P \times Q$　は点である．

D を Allison-Hein triple system T での微分で $D^2 = 0$　とすると，$D\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$，したがって，$a, b \in \mathfrak{M}$ に対し　$K(a,b)=0$　のとき，$L(a,b)$　は T の微分になり，

$[L(a,b), K(a,x)] = [L(a,b), K(b,x)] = 0$ ならば，上の定理より $L(a,b)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$．これから $\exp L(x,y) := I + L(x,y) + \frac{1}{2!}L(x,y)^2 + \cdots$ とおくと，$\exp L(a,b)\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ となり $\exp L(a,b)$ は多様体 $\mathfrak{M}$ を不変にする．

6．$\mathfrak{T}$ を Lie triple system，$(\ ,\ )$ を $\mathfrak{T}$ の非退化対称双一次形式で，$\mathfrak{T}$ の内部微分で不変なものとする：

$$([abx], y) + (x, [aby]) = 0.$$

半単純 Lie triple system $\mathfrak{T}$ の Killing form はこの条件をみたす．Freudenthal による symplecton の定義は Lie triple system に対しても適用できる．$a, b \in \mathfrak{T}$ に対し $\mathfrak{T}$ の一次写像 $\langle a, b\rangle$ を次式により定義する：

$\langle a, b\rangle x = \frac{1}{2}(R(a,b) + R(b,a))x - \frac{1}{2}(a,x)b - \frac{1}{2}(b,x)a + \epsilon(a,b)x$,

$x \in T$，ここで ϵ は constant $\neq 1$ である．

$\mathfrak{N} := \{a \in \mathfrak{T} \mid \langle a, a\rangle = 0\}$ とおく．容易にわかるように $\langle a, a\rangle = 0 \Leftrightarrow [xaa] = (a,x)a$ for all $x \in \mathfrak{T}$，かつ $\langle a, a\rangle = 0 \Rightarrow (a,a) = 0$．

<u>補題</u>　$a, b \in \mathfrak{N}$ に対して，次が成立する．

$2R(a,b)^2 x - R(b,a)R(a,b)x + (a,b)R(a,b)x = (a,b)(a,x)b$ for all $x \in \mathfrak{T}$.

この補題で，さらに $(a,b) = 0$ を仮定すると次が得られ

る．

(i) $$2R(a,b)^2 = R(b,a)R(a,b) = R(a,b)R(b,a) = 2R(b,a)^2,$$

(ii) $$R(a,b)^2 = L(a,b)R(a,b) = R(a,b)L(a,b),$$

(iii) $$L(a,b)^2 + 2R(a,b)^2 = 0.$$

$a_1, a_2 \in \mathfrak{M}$ に対して，関係式

$$\langle a_1, a_2\rangle^k a_i = (\epsilon - 1)^k (a_1, a_2)^k a_i, \qquad (i = 1, 2)$$

が成立するから，　$\langle a_1, a_2\rangle^k = 0 \Rightarrow (a_1, a_2) = 0.$

定理　$a, b \in \mathfrak{M}$ に対して

(i) $$\langle a, b\rangle^2 = 0 \iff R(a,b)^2 = 0 \text{ または } L(a,b)^2 = 0,$$

(ii) $$\langle a, b\rangle^3 = 0 \iff (a, b) = 0.$$

[証]　もし $(a,b) = 0$ ならば，形式 $(\ ,\ )$ が内部微分に対し不変であることから　$4\langle a, b\rangle^2 x = (R(a,b) + R(b,a))^2 x$　が成立することを注意する．上の補題により次が得られる．

(*) $$4\langle a, b\rangle^2 = 6R(a,b)^2 = -3L(a,b)^2.$$

(i) の証：　$\langle a, b\rangle^2 = 0$　ならば　$(a, b) = 0$．ゆえに $R(a,b)^2 = L(a,b)^2 = 0$．　逆に　$R(a,b)^2 = 0$ [または，$L(a,b)^2 = 0$]　と仮定すると，　$0 = R(a,b)^2 b = (a,b)^2 b$ [または，$0 = L(a,b)^2 b = (a,b)^2 b$]　となり $(a,b) = 0$．ゆえに，(*) より $\langle a, b\rangle^2 = 0$　が得られる．

(ii) の証：　$(a, b) = 0$　と仮定する．上の補題の後の

結果より，$R(a,b)^3 = R(a,b)R(b,a)^2 = 2R(a,b)^2R(b,a)$ $= 4R(a,b)^3$ となり $R(a,b)^3 = 0$ が得られる．
$2(x, R(a,b)^2y) = -(x, L(a,b)^2y) = -(L(a,b)^2x, y)$ であるから (*) より $4\langle a,b\rangle^3x = 3\{(R(a,b)+R(b,a))R(a,b)^2x - (a, R(a,b)^2x)b - (b, R(a,b)^2x)a\} = 0$，したがって，$\langle a,b\rangle^3 = 0$ が得られる．

系　$a, b \in \mathfrak{M}$ に対し $\langle a,b\rangle = 0 \Rightarrow R(a,b)^2 = L(a,b)^2 = 0$，$R(a,b)^2 = 0$ または $L(a,b)^2 = 0 \Rightarrow (a,b) = 0$.

$\mathfrak{g}$ が Lie algebra から $[abc] = [[a,b]c]$ により導びかれる Lie triple system とし，$(\ ,\ )$ を $\mathfrak{g}$ 上の対称双一次形式で，adjoint representation に関して不変，即ち，$([ax], y) + (x, [a,y]) = 0$ とする．$a, b \in \mathfrak{M}$，$(a,b) = 0$ のとき [7, §40] より条件 $R(a,b)^2 = 0$ は $([a,b], x)[a,b] = 0$ とかける．ゆえに $R(a,b)^2 = 0 \Leftrightarrow [a,b] = 0$．したがって，

系 [7, 23]　metasymplectic geometry において，symplecta Φ_1, Φ_2 に対して次が成立つ．

(i)　$\langle \Phi_1, \Phi_2\rangle^2 = 0 \Leftrightarrow [\Phi_1, \Phi_2] = 0$,

(ii)　$\langle \Phi_1, \Phi_2\rangle^3 = 0 \Leftrightarrow (\Phi_1, \Phi_2) = 0$.

[註]　Freudenthal は symplecta Φ_1 と Φ_2 は $\langle\Phi_1,\Phi_2\rangle = 0$ のとき verbunden (joined)，上の系 (i), (ii) のときそれぞれ verflochten (interwoven), scharnierend (hinged)

とよんだ. symplecta Φ_1, Φ_2 の位置関係は $\Phi_1 = \Phi_2$ → verbunden → verflochten → scharnierend → 一般の位置 になっている[7, §41]. くわしくは[7, 8, 9, 21]を参照して下さい.

この小論の準備を通して浅野洋氏から色々とアドバイスを頂きましたことに感謝します.

References

[1] B.N.Allison, A construction of Lie algebras from $\mathfrak{J}$-ternary algebras, Amer.J.Math. 98, 285-294 (1976).

[2] H.Asano, On triple systems, Yokohama City University Ronsô, Ser.Nat.Sci., 27, 7-31 (1975) (in Japanese).

[3] J.R.Faulkner, A construction of Lie algebras from a class of ternary algebras, Trans.Amer. Math.Soc., 155, 397-408 (1971).

[4] J.R.Faulkner and J.C.Ferrar, On the structure of symplectic ternary algebras, Nederl.Akad. Wetensch.Proc.Ser.A, 75 = Indag.Math., 34, 247-256 (1972).

[5] H.Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene, I,II, Nederl.Akad.Wetensch. Proc.Ser.A, 57 = Indag.Math., 16, 218-230; 363-368 (1954).

[6] H.Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene,VIII,IX, Nederl.Akad.Wetensch. Proc.Ser.A, 62 = Indag.Math., 21, 447-465; 466-474 (1959).

[7] ______________, Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene,X,XI, Nederl.Akad.Wetensch. Proc.Ser.A, 66 = Indag.Math., 25, 457-471; 472-487 (1963).

[8] ______________, Lie groups in the foundations of geometry, Advances in Math., 1, 145-190 (1964).

[9] H.Freudenthal and H.de Vries, Linear Lie groups, Academic Press, 1969.

[10] W.Hein, A construction of Lie algebras by triple systems, Trans.Amer.Math.Soc., 205, 79-95 (1975).

[11] ______, Innere Lie-Tripelsysteme und $\mathfrak{J}$-ternäre Algebren, Math.Ann., 213, 195-202 (1975).

[12] N.Jacobson, Structure and representations of Jordan Algebras, Amer.Math.Soc., 1971.

[13] Y.Kakiichi, Relation between Hein's construction of Lie algebras and the construction of Lie algebras from symplectic triple systems, to appear.

[14] I.L.Kantor, Некоторые обобщения йордановых алгебр, Тр.семинара по вект. и тенз.анализу, 16, 407-499 (1972).

[15] ___________, Models of exceptional Lie algebras, Soviet Math.Dokl., 14, 254-258 (1973).

[16] M.Kikkawa, Geometry of homogeneous Lie loops, Hiroshima Math.J., 5, 141-179 (1975).

[17] M.Koecher, Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras, I, Amer.J.Math., 89, 787-815 (1967).

[18] W.G.Lister, A structure theory of Lie triple systems, Trans.Amer.Math.Soc., 72, 217-242 (1952).

[19] K.Meyberg, Lectures on algebras and triple systems, The University of Virginia, Charlottesville, Va., 1972.

[20] T.S.Ravisankar, Some remarks on Lie triple systems, Kumamoto J.Sci.(Math.), 11, 1-8 (1974).

[21] J.Tits, Groupes algébriques semi-simples et géométries associées, Algebraical and topological foundations of geometry. (Proc. Colloq., Utrecht, 1959), 175-192, Pergamon, 1962.

[22] J.A.Wolf, On the geometry and classification of absolute parallelisms,I,II, J.Diff.Geo., 6, 317-334: 7, 19-44 (1972).

[23] K.Yamaguti, Note on points and symplecta in the metasymplectic geometry, Nederl.Akad.Wetensch. Proc.Ser.A, 76 = Indag.Math., 35,397-402(1973).

[24] __________, On weak representations of a class of ternary systems, Mem.Fac.Gen.Ed.,Kumamoto Univ., Ser.Nat.Sci., No.9, 1-8 (1974).

[25] __________, Remarks on characterizations of the points and symplecta in the metasymplectic geometry, Mem.Fac.Gen.Ed.,Kumamoto Univ.,Ser.Nat.Sci., No.11, 1-8 (1976).

[26] K.Yamaguti and H.Asano, On the Freudenthal's construction of exceptional Lie algebras, Proc.Japan Acad., 51, 253-258 (1975).